

# 色散算子敛散性的研究

李 丹 著

中国原子能出版社

## 作者简介

**李丹** 北京工商大学数学与统计学院讲师，基础数学专业，研究方向为调和分析及其应用，主要研究色散算子的敛散性、Fourier 乘子的有界性和交换子的有界性等调和分析的基本问题，多篇论文发表在“Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)”“Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)”“J. Math. Anal. Appl.”“Rocky Mountain J. Math.”和“Front. Math. China.”等知名杂志上，主持北京工商大学青年科研基金 1 项。在教学上，主要负责讲授本科生《微积分》课程，并且完成了本科生《高等数学》课程部分章节的内容录制工作，讲授内容即将在网站上线。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

色散算子敛散性的研究 / 李丹著. —北京 : 中国原子能出版社, 2022. 6

ISBN 978-7-5221-1995-3

I. ①色… II. ①李… III. ①实用调和分析-研究  
IV. ①O241.86

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2022) 第 104771 号

## 色散算子敛散性的研究

---

出版发行 中国原子能出版社 (北京市海淀区阜成路 43 号 100048)

责任编辑 张 梅 田镇瑜

装帧设计 侯怡璇

责任校对 冯莲凤

责任印制 赵 明

印 刷 北京九州迅驰传媒文化有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 7.75

字 数 191 千字

版 次 2022 年 6 月第 1 版 2022 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5221-1995-3

定 价 35.00 元

---

发行电话: 010-68452845

版权所有 侵权必究

# 前言

应用调和分析方法来解决偏微分方程中的问题是调和分析研究的一个重要领域, 著名的 Calderón-Zygmund 算子就是典型的例子. 20 世纪 50 年代 A. Calderón 与 Z. Zygmund 引入了著名的 Calderón-Zygmund 算子, 并发展出了一套 Calderón-Zygmund 算子理论. 借助于这套新理论, A. Calderón 证明了双曲方程 Cauchy 问题解的存在唯一性. C. Fefferman、E. Stein 和 C. Kenig 等著名数学家在椭圆方程和双曲方程等领域的研究进一步拓展了调和分析方法在偏微分方程领域的应用. 本书研究的是与色散算子相关的几个调和分析问题, 主要考虑线性色散方程初值问题的解算子, 相关的研究与调和分析中著名的限制性定理有着紧密的联系.

本书收集了作者近年来对色散算子敛散性的研究成果, 其中大部分内容都已在国内外数学期刊上发表. 本书共分为六章, 第一章简单介绍了调和分析的基本知识, 第二章概括了色散算子敛散性的基本内容, 第三章讨论分数次 Schrödinger 算子和广义色散算子子列的点态收敛, 第四章讨论一维情况下 4 阶 Schrödinger 算子和 Beam 算子的不收敛性, 第五章研究 Boussinesq 算子的敛散性, 第六章研究分数次 Schrödinger 算子不收敛集合的 Hausdorff 维数. 希望本书能为从事这些相关专业的研究生以及科研工作者的研究工作提供一定的帮助.

作者非常感谢北京工商大学数学与统计学院院长刘艳楠教授在本书的出版过程中给与的支持与鼓励, 感谢北京工商大学数学与统计学院各位同事的帮助, 感谢北京工商大学对本书出版的支持. 本书的出版得到北京工商大学统计学科建设专项项目 (No.19008022057) 的资助, 在此一并致谢.

鉴于作者学识水平有限, 本书难免存在疏漏和不足之处, 望各位专家和读者予以批评指正.

李丹

2022 年 3 月 于北京工商大学

# 目录

第一章 预备知识 .....	1
1.1 积分公式 .....	1
1.2 卷积 .....	2
1.3 Schwartz 函数空间 .....	3
1.4 Fourier 变换 .....	4
1.4.1 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换 .....	4
1.4.2 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换 .....	5
1.4.3 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换 .....	6
1.5 Hardy-Littlewood 极大算子 .....	7
1.6 Fourier 乘子 .....	9
1.6.1 $L^p$ 乘子的定义及性质 .....	9
1.6.2 $L^p$ 乘子的充分性条件 .....	9
第二章 色散算子的基本问题 .....	11
2.1 研究背景 .....	11
2.1.1 Carleson 问题 .....	11
2.1.2 色散算子不收敛集合的 Hausdorff 维数 .....	17
2.2 主要定理 .....	19
第三章 分数次 Schrödinger 算子和广义色散算子子列的点态收敛 .....	26
3.1 主要定理 .....	26
3.2 分数次 Schrödinger 算子子列的点态收敛 .....	29
3.2.1 证明定理 3.1.1 .....	29
3.2.2 证明定理 3.1.2 .....	31
3.2.3 证明定理 3.1.3 .....	32
3.2.4 证明定理 3.1.4 .....	33
3.3 广义色散算子子列的点态收敛 .....	34
3.3.1 证明定理 3.1.5 .....	34
3.3.2 证明定理 3.1.6 .....	35

<b>第四章 一维情况下 4 阶 Schrödinger 算子和 Beam 算子不收敛的反例</b> .....	38
4.1 主要定理 .....	38
4.2 4 阶 Schrödinger 算子不收敛的反例 .....	39
4.2.1 四个预备引理 .....	39
4.2.2 证明定理 4.1.1 .....	44
4.3 Beam 算子不收敛的反例 .....	46
4.3.1 三个预备引理 .....	46
4.3.2 证明定理 4.1.2 .....	49
<b>第五章 Boussinesq 算子的敛散性</b> .....	51
5.1 主要定理 .....	51
5.2 一维情况下 Boussinesq 算子的点态收敛 .....	54
5.2.1 证明定理 5.1.1 (a) .....	54
5.2.2 证明定理 5.1.1 (b) .....	61
5.3 Boussinesq 算子不收敛集合的 Hausdorff 维数 .....	67
5.3.1 证明定理 5.1.2 (a) .....	67
5.3.2 证明定理 5.1.2 (b) .....	69
5.4 高维情况下 Boussinesq 算子的点态收敛 .....	71
5.4.1 证明定理 5.1.3 (充分性) .....	71
5.4.2 证明定理 5.1.3 (必要性) .....	78
<b>第六章 分数次 Schrödinger 算子不收敛集合的 Hausdorff 维数</b> .....	81
6.1 主要定理 .....	81
6.2 分数次 Schrödinger 算子的极大算子局部 $L^2$ 估计 .....	82
6.2.1 证明命题 6.2.1 .....	82
6.2.2 证明推论 6.2.1 $\Rightarrow$ 定理 6.1.1 .....	85
6.3 分数次 Schrödinger 算子的局部 $L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$ 估计 .....	88
6.3.1 证明推论 6.3.1 .....	88
6.3.2 证明推论 6.3.1 $\Rightarrow$ 定理 6.2.1 .....	91
6.4 证明定理 6.3.1 (Broad-Narrow 分析) .....	93
6.4.1 证明定理 6.3.1— $R \lesssim 1$ .....	93
6.4.2 证明定理 6.3.1— $R \gg 1$ .....	94
<b>参考文献</b> .....	110